# Contrat Doctoral – ED Galilée

**Titre du sujet :**

**Marches aléatoires avec branchement et capacité.**

- Unité de recherche : LAGA
- Discipline : Mathématiques
- Direction de thèse : Yueyun Hu (LAGA), Amine Asselah (Co-encadrant : Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées , Paris-Est Créteil. Email : amine.asselah@u-pec.fr)
- Contact : yueyun@math.univ-paris13.fr
- Domaine de recherche : Probabilités
- Mots-clés : Marches aléatoires avec branchement, arbre aléatoire, capacité.

## 1 Description détaillée du sujet : capacité branchante

La capacité newtonienne discrète, ou simplement capacité, peut être définie comme suit : Soit $d \geq 3$ et $K \subset \mathbb{Z}^d$ un ensemble fini non vide. Soit $(S_n^x, n \in \mathbb{N})$ une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$ partant de $x$. Son support est le sous-ensemble aléatoire $\{S_k^x, k \in \mathbb{N}\}$ noté $\mathcal{S}^x$. La capacité de $K$, notée $\mathrm{Cap}(K)$, peut être définie (à une constante multiplicative près) comme

$$\mathrm{Cap}(K) := \lim_{x \in \mathbb{Z}^d, |x| \to \infty} \frac{1}{g(x)} \mathbb{P}(\mathcal{S}^x \cap K \neq \emptyset),$$

où $g$ est la fonction Green de $(S_n^x)$. Ainsi, la capacité d'un sous-ensemble fini $K$ de $\mathbb{Z}^d$ est proportionnelle à la probabilité d'atteindre $K$ par une marche partant d'un site éloigné $x$, renormalisée par $|x|^{2-d}$. C'est donc un objet fondamental en probabilité.

On peut s'intéresser à la capacité d'un ensemble aléatoire. Par exemple, la capacité du *support* d'une marche aléatoire $S[0,n] = \{S_0^0, \ldots, S_n^0\}$ a suscité de nombreux travaux récents, et est liée à l'intersection de deux marches aléatoires. Suite aux résultats de Jain et Orey [13], Asselah, Schapira et Sousi [5, 6]), et Chang [12], on sait que $\mathrm{Cap}(S[0,n])$ est de l'ordre de $n$ lorsque $d \geq 5$, de l'ordre de $\frac{n}{\log n}$ lorsque $d = 4$, et de l'ordre de $n^{1/2}$ lorsque $d = 3$. Cela témoigne d'une transition en dimension $d = 4$. Voir Asselah, Schapira et Sousi [6], Schapira [17] et les références citées pour les théorèmes centraux de la limite.

On peut aussi s'intéresser à une marche branchante, plutot qu'à une marche simple.

**Le modèle.** Considérons un arbre critique de Galton-Watson. C'est-à-dire que chaque individu a en moyenne un enfant, et presque sûrement chaque arbre est fini. Nous associons à chaque arêtes indépendamment un vecteur unitaire de $\mathbb{Z}^d$ (qui sera l'incrément de nos marches). Ainsi le sommet $u$ de l'arbre est associé à la somme des incréments le long de l'unique géodésique qui relie $u$ à la racine de l'arbre. Pour fixer les idées, la loi des incréments est un choix uniforme au hasard d'un des $2d$ vecteurs reliants l'origine à ses voisins. L'ensemble des positions associées aux sommets de l'arbre est la Marche Aléatoire Branchante d'acronyme anglais BRW que nous noterons $\mathcal{T}^z$ lorsque la racine est associée au site $z \in \mathbb{Z}^d$. C'est un nuage de points aléatoires, qui a une probabilité d'ordre $1/n$ de contenir $n^2$ points, et donc le nombre moyen de points est infini. Une grande littérature considère l'analogue continu de la marche branchante : le serpent brownien (voir l'excellent cours [14] pour un panorama sur ce thème), alors que le cas discret est bien moins étudié. Notons, que la marche branchante est bien moins étudiée.

La capacité branchante, ou *branching capacity* notée $\mathrm{Bcap}(\cdot)$, est un concept relativement nouveau défini et étudié dans une série de travaux par Zhu [19, 20]. La capacité branchante se définit naturellement lorsque le processus est transient, et Q.Zhu a consideré l'arbre critique en $d \geq 5$. La capacité branchante de $K$ est la limite (qui existe) suivante :

$$\mathrm{Bcap}(K) := \lim_{x \to \infty, x \in \mathbb{Z}^d} \frac{1}{g(x)} \mathbb{P}_x(\mathcal{T}^x \cap K \neq \emptyset).$$

Une série de travaux récents exploitent plus profondément cette notion, par exemple Asselah, Okada, Schapira et Sousi [4] montrent qu'en utilisant l'ergodicité de Le Gall et Lin [16], $\mathrm{Bcap}(K)$ est la limite presque sûre renormalisée du range de la somme de $K$ et des premiers $n$ points dans une marche aléatoire branchante, de plus $\mathrm{Bcap}(K)$ peut être comparée avec la somme de Minkowski de range de $K$ et deux copies indépendantes d'une marche aléatoire. Asselah, Schapira et Sousi [7] a montré que $\mathrm{Bcap}(K)$ apparait naturellement dans la déviation du temps d'occupation da la marche branchante. Bai, Delmas et Hu [8] ont établi un principe d'invariance entre Bcap et la capacité d'un serpent Brownienne (Brownian snake capacity).

Proposons trois problèmes.

**Problem 1** *Intersection de deux marches branchantes.*

Estimer la probabilité que deux marches branchantes se recontrent souvent sur $\mathbb{Z}^d$ avec $d > 8$. Asselah, Schapira et Sousi [7] ont des estimées de la probabilité qu'une marche branchante passe beaucoup de temps dans une région donnée de l'espace. Cela devrait nous permettre d'utiliser les mêmes idées que celles utilisées pour le problème d'intersection de deux marches simples sur $\mathbb{Z}^d$ avec $d > 4$ dans un travail de Asselah et Schapira [3].

**Problem 2** *Définir la branching capacity sur $\mathbb{Z}^4$.*

Peut-on définir la notion Bcap dans notre cadre discret pour $d = 4$. En fait, on peut définir la capacité en dimension d'espace deux, en considérant une troncature de la fonction Green. Par cette analogie, on pourrait s'attendre à un phénomène similaire pour le cas de la marche branchante. Une façon probabiliste de rechercher un telle fonctionnelle est de rechercher une estimée de la probabilité de passer un temps fixé dans chaque boule d'un domaine $\mathcal{D}$ composé de boules disjointes de même rayon, et faire apparaitre dans l'estimée une fonctionnelle de l'ensemble $\mathcal{D}$. On voudrait que cette fonctionnelle aie les qualités d'une capacité (monotonie et subadditivité).

**Problem 3** *Étudier la branching capacity du support d'une marche branchante dans $\mathbb{Z}^d$ pour $d \geq 5$.*

La capacité du support d'une marche branchante critique a été étudiée récemment (Bai et Wan [11], Bai et Hu [10]. Soit $\mathrm{Cap}(R_n)$ la capacité d'une marche branchante critique conditionnée à avoir une population totale $n$. Il a été montré qu'il y une transition de phase en dimension $d = 6$ : quand $d \geq 7$, $\mathrm{Cap}(R_n) \approx n$ ; quand $d = 6$, $\mathrm{Cap}(R_n) \approx \frac{n}{\log n}$ et quand $d \in \{3, 4, 5\}$, $\mathrm{Cap}(R_n) \approx n^{(d-2)/4}$.

Par ailleurs, Schapira [18], Bai, Delmas et Hu [9] ont étudié la branching capacity d'une marche aléatoire, $\mathrm{Bcap}(S[0, n])$. Il y a également une transition en dimension $d = 6$ : quand $d \geq 7$, $\mathrm{Bcap}(S[0, n]) \approx n$ ; quand $d = 6$, $\mathrm{Bcap}(S[0, n]) \approx \frac{n}{\log n}$ et quand $d = 5$, $\mathrm{Bcap}(S[0, n]) \approx n^{1/2}$.

On se propose d'étudier la capacité branchante d'une marche branchante, qui devrait avoir une transition de phase en dimension $d = 8$, et est lié comme le premier problème à l'intersection de deux marches branchantes.

## 2 Contexte d'une co-direction

Amine Asselah, Professeur à Paris-Est Créteil, et Yueyun Hu, Professeur au LAGA, sont membres de l'ANR LOCAL (Localization for Polymers and Random Walks, 2022-2027) dont l'objet principal est d'étudier un chemin aléatoire interagissant soit avec un milieu aléatoire, soit avec son propre chemin. Notre travaux récents interagissent naturellement.

## Références

[1] O. Angel, T. Hutchcroft, A. Járai. On the tail of the branching random walk local time. Probab. Theory Related Fields 180 (2021), 467–494.

[2] Asselah A. ; Schapira B. Deviations for the capacity of the range of a random walk. Electron. J. Probab. 25 (2020), Paper No. 154, 28 pp.

[3] A. Asselah, B. Schapira. Extracting subsets maximizing capacity and folding of random walks. To appear in Ann. Sc. de l'E.N.S. (2023).

[4] A. Asselah, I. Okada, B. Schapira, and P. Sousi. Branching random walks and Minkowski sum of random walks. *arXiv preprint arXiv :2308.12948*, 2023.

[5] Asselah, A., Schapira, B. and Sousi, P. (2018). Capacity of the range of random walk on $\mathbb{Z}^d$. *Trans. Am. Math. Soc.,* **370** 7627–7645.

[6] Asselah, A., Schapira, B. and Sousi, P. (2019). Capacity of the range of random walk on $\mathbb{Z}^4$. *Ann. Probab.* **47** 1447–1497.

[7] Asselah, A., Schapira, B. and Sousi, P. (2023+). Local times and capacity for transient branching random walks. *preprint arXiv :2203.03188*

[8] T. Bai, J.F. Delmas, Y. Hu. (2024). Branching capacity and Brownian snake capacity. *preprint arxiv : arXiv :2402.13735*

[9] T. Bai, J.F. Delmas, Y. Hu. Branching capacity of a random walk on $\mathbb{Z}^5$. (in preparation).

[10] T. Bai, Y. Hu. Convergence in law for the capacity of the range of a critical branching random walk. Ann. Appl. Probab. 33 (2023), 4964–4994.

[11] T. Bai, Y. Wan. Capacity of the range of tree-indexed random walk. Ann. Appl. Probab. 32 (2022), 1557–1589.

[12] Chang, Y. (2017). Two observations on the capacity of the range of simple random walks on $\mathbb{Z}^3$ and $\mathbb{Z}^4$. *Electron. Commun. Probab.* **22** 1–9.

[13] Jain, N.C. and Orey, S. (1968). On the range of random walk. *Israel Journal of Mathematics* **6** 373—380.

[14] Le Gall, J-F. Spatial branching processes, random snakes and partial differential equations. Lectures in Mathematics ETH Zurich. Birkhauser Verlag, Basel, 1999. x+163 pp.

[15] J.-F. Le Gall, S. Lin. The range of tree-indexed random walk in low dimensions. The Annals of Probability 43 (2015), 2701–2728.

[16] J.-F. Le Gall, S. Lin. The range of tree-indexed random walk. J. Inst. Math. Jussieu 15 (2016), 271–317.

[17] Schapira, B. (2020). Capacity of the range in dimension 5. *Ann. Probab.* **48** 2988–3040.

[18] B. Schapira. Branching capacity of a random walk range. ArXiv 2023.

[19] Q. Zhu. On the critical branching random walk I : branching capacity and visiting probability, arXiv :1611.10324.

[20] Q. Zhu. On the critical branching random walk III : The critical dimension. Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. 57 (2021), 73–93.